Nombres réels et complexes

I. Nombres réels

Weierstrass (1863) et Dedekind (1872) furent les premiers a proposé une construction satisfaisante de $\mathbb{R}$ ... que nous ne présenterons pas.
Parmi les nombres réels, ceux qui s'écrivent comme rapport de deux entiers sont dits rationnels, ils forment l'ensemble $\mathbb{Q}$. Les autres sont dits irrationnels.

1°) Opérations dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ i.e. de deux applications : $\begin{matrix}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x+y\end{matrix}$ et $\begin{matrix}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x\times y\end{matrix}$.

Propriétés de l'addition : $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$,
$a+b=b+a$ (commutativité)
$(a+b)+c=a+(b+c)$ noté $a+b+c$ (associativité)
$a+0=0+a=a$ (0 est élément neutre)
$\exists! d\in\mathbb{R}$ tel que $a+d=d+a=0$ (tout élément est symétrisable)
Cet élément d est noté $-a$ et cela permet de définir l'opération de soustraction.
Propriétés de la multiplication : $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$,
$ab=ba$ (commutativité),
$(ab)c=a(bc)$ noté abc (associativité),
$a\times 1=1\times a=a$ (1 est élément neutre),
$a(b+c)=ab+ac$ (la multiplication est distributive sur l'addition).
Si $a\neq 0$ alors $\exists! d\in\mathbb{R}$ tel que $ad=da=1$ (tout élément non nul est inversible).
Cet élément d est noté $1/a$ et cela permet de définir l'opération de division.
Relation d'ordre
$\mathbb{R}$ est ordonné par une relation $\leq$.
Celle-ci permet de visualiser $\mathbb{R}$ comme une droite (figure)
La relation $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$ i.e. : $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\leq b\Leftrightarrow a+c\leq b+c$ et $c\geq 0$ et $a\leq b\Rightarrow ac\leq bc$.

Prop : $\forall a,b\in\mathbb{R}$. Si $0<a\leq b$ ou $a\leq b<0$ alors $\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a}$.

Prop : $\forall a\in\mathbb{R}, a^2\geq 0$. $\forall a,b\in\mathbb{R}, ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Prop : Soit $a\in\mathbb{R}^+$. Si $\forall\varepsilon>0$, $a\leq\varepsilon$ alors $a=0$.

2°) Valeur absolue

Déf : Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{sinon}\end{cases}$ appelé valeur absolue de x.

Prop : $\forall x,y\in\mathbb{R}, |x|\geq 0, |-x|=|x|, x\leq|x|$, $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.
$|xy|=|x||y|$ et si $x\neq 0, |1/x|=1/|x|$.

Prop : (inégalité triangulaire)
$\forall x,y\in\mathbb{R}, |x+y|\leq|x|+|y|$ avec égalité ssi x et y ont même signe.

Cor : (inégalité triangulaire renversée)
$\forall x,y\in\mathbb{R}, \big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$.

Déf : Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On appelle distance de x à y le réel $d(x,y)=|y-x|$.

Prop : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ on a :
$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \geq 0$. On appelle valeur approchée de a à ε près tout réel x tel que $|x-a| \leq \varepsilon$.
On note $a = x$ à ε près.
Si $x \leq a$ (resp. $x \geq a$), on dit que x est une valeur approchée par défaut (resp. par excès).

3°) Partie entière d'un réel

Déf : Soit $x \in \mathbb{R}$. Le plus grand entier n tel que $n \leq x$ est appelé partie entière de x, on la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Prop : $x \mapsto E(x)$ est un fonction croissante.

Prop : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a équivalence entre :
(i) $n = E(x)$,
(ii) $n \leq x < n+1$,
(iii) $x-1 < n \leq x$.

Prop : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{10^n} E(10^n x) \leq x < \frac{1}{10^n} E(10^n x) + \frac{1}{10^n}$.

Déf : Les nombres décimaux $\frac{1}{10^n} E(10^n x)$ et $\frac{1}{10^n} E(10^n x) + \frac{1}{10^n}$ sont appelés parties décimales par défaut et par excès de x à la précision $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

4°) Intervalles de $\mathbb{R}$

Déf : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.
On appelle intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles :
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$,
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$,
$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$, $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$,
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$, $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$, $\mathbb{R}$ et $\varnothing$.
Les intervalles du type $[a,b], [a,+\infty[,]-\infty,a], \mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont dits fermés.
Les intervalles du type $]a,b[,]-\infty,a[,]a,+\infty[, \mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont dits ouverts.
Les intervalles du type $[a,b[$ et $]a,b]$ sont dits semi-ouverts.
Les intervalles du type $[a,b]$ sont appelés segments.

Théorème : (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)
Soit $I \subset \mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$,
(ii) $\forall a,b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $[a,b] \subset I$.

Déf : Un intervalle I est dit non singulier ssi il contient au moins deux points, i.e. qu'il n'est ni vide, ni réduit à un point.

Prop : Tout intervalle non singulier contient des nombres rationnels et irrationnels.

5°) Congruence dans $\mathbb{R}$

Soit $\alpha > 0$.

Déf : Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x est congru à y modulo α ssi $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha$. On note alors $x = y \quad [\alpha]$.

Prop : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. $x = x \quad [\alpha]$
Si $x = y \quad [\alpha]$ alors $y = x \quad [\alpha]$.
Si $x = y \quad [\alpha]$ et $y = z \quad [\alpha]$ alors $x = z \quad [\alpha]$.

Prop : Soit $x,y,x',y' \in \mathbb{R}$ tels que $x = x' \ \ [\alpha]$ et $y = y' \ \ [\alpha]$.

$x+y = x'+y' \ \ [\alpha]$, $-x = -x' \ \ [\alpha]$ et $\forall \lambda > 0, \lambda x = \lambda x' \ \ [\lambda\alpha]$.

6°) Droite numérique achevée

On forme un nouvel ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$.

Déf : $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé droite numérique achevée.

On prolonge partiellement $+$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x+(+\infty) = +\infty$, $x+(-\infty) = -\infty$, $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ et $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.

On prolonge partiellement $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x\times(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $x\times(-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $(+\infty)\times(+\infty) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$ et $(+\infty)\times(-\infty) = -\infty$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leq$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x, x \leq +\infty$ et $-\infty \leq +\infty$.

II. Nombres complexes

1°) Présentation de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est un ensemble contenant $\mathbb{R}$ dont les éléments sont appelés nombres complexes.
$\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ prolongeant les opérations existant sur $\mathbb{R}$ et conservant leurs propriétés.
$\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une relation d'ordre « intéressante » mais en revanche, sur $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -1$ possède deux solutions opposées i et $-i$.
Par construction de $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2, z = a + i.b$.

Déf : L'écriture $z = a + i.b$ est appelée forme algébrique du complexe z. Les réels a et b sont respectivement appelés parties réelle et imaginaire de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$, $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$,
$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z')\,\mathrm{Im}(z)$.

2°) Le plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déf : Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle point d'affixe z le point $M \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ avec $a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z)$.

On note $M(z)$ pour signifier que M est le point d'affixe z.

Déf : Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle vecteur d'affixe z le vecteur $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ avec $a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z)$.

On note $\vec{u}(z)$ pour signifier que $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe z.

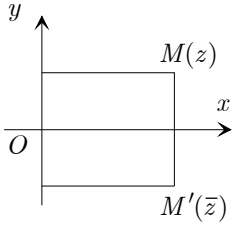
Prop : $M(z)$ ssi $\overrightarrow{OM}(z)$,
si $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ alors $(\vec{u}+\vec{v})(z+z')$,
si $\vec{u}(z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda.\vec{u})(\lambda z)$,
si $M(z)$ et $M'(z')$ alors $\overrightarrow{MM'}(z'-z)$.

3°) Conjugaison

Déf : Soit $z = a + i.b \in \mathbb{C}$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$). On appelle conjugué de z le complexe $\overline{z} = a - i.b$.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

$\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}'$ et si $z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

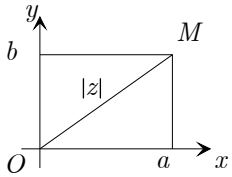


Prop : $\forall z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

Cor : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ et $z \in i.\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

4°) Module

Déf : Soit $z = a + i.b \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). On appelle module de z le réel $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.



Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

$|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $|z|^2 = z\overline{z} = |\overline{z}|^2$, $|zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Cor : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$: $|z^n| = |z|^n$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z}$: $|z^n| = |z|^n$.

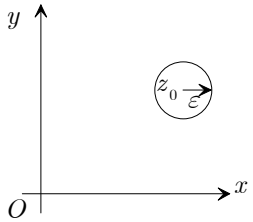
Prop : (Inégalité triangulaire)

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

De plus, il y a égalité ssi les points $M(z)$ et $M'(z')$ figurent sur une même demi droite d'origine O .

Cor : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$.

Déf : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On appelle distance de z à z' le réel $d(z, z') = |z' - z|$.



Prop : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$:

$d(z, z') = d(z', z)$,

$d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$ et

$d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z')$.

Déf : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon \geq 0$.

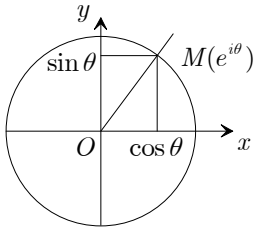
On appelle valeur approchée de z_0 à ε près tout complexe z tel que $|z - z_0| \leq \varepsilon$.

5°) Argument

a) exponentielle imaginaire

Déf : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle imaginaire d'angle θ le complexe :

$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta$.



Prop : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$, $\mathrm{e}^{i\theta}.\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$, et

$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$.

Cor : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$ i.e. $(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos n\theta + i.\sin n\theta$.

b) complexe de module 1

Déf : On note U l'ensemble des complexes de module 1. Ainsi $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Prop : $\forall z \in U, \exists \theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.

c) argument

Théorème :

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists \theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Cette écriture est appelée forme trigonométrique du complexe z .

Déf : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelé argument du complexe z . On note

$\arg(z) = \theta \quad [2\pi]$.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$: $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$,

$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$,

$\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$ et

$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$.

6°) Exponentielle complexe

Déf : Soit $z = a + i.b \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

On appelle exponentielle complexe de z le complexe $\exp(z) = \mathrm{e}^a.\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a(\cos b + i.\sin b)$.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$:

$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$,

$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$,

$\exp(z) \neq 0$ et $1/\exp(z) = \exp(-z)$,

$\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$.

III. Equations et systèmes numériques

1°) Résolution d'une équation

Pour résoudre une équation on transforme celle-ci par équivalences ou par implications en une ou plusieurs équations dont les solutions sont immédiates.

2°) Résolution d'un système

Pour résoudre un système d'équations, on transforme celui-ci par équivalences ou par implications en un ou plusieurs systèmes permettant d'exprimer l'ensemble solution. Par exemple, on peut exploiter une équation pour exprimer une inconnue en fonction des autres et remplacer cette expression dans les autres équations.

3°) Résolution de l'équation $z^n = Z$

a) racine n^{ème} de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déf : On appelle racine n ème de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$.
On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.

Prop : Si $z \in U_n$ alors $|z| = 1$, $\overline{z} \in U_n$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, z^k \in U_n$.

Déf : On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\omega_k = \omega^k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Prop : $\forall k \in \mathbb{Z}, \omega_k \in U_n$.

Rq $\omega_0 = 1, \omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega^2, ..., \omega_{n-1} = \omega^{n-1}, \omega_n = 1, \omega_{n+1} = \omega, \omega_{n+2} = \omega^2 ...$

Prop : $\forall k, \ell \in \mathbb{Z}, \omega_k = \omega_\ell \Leftrightarrow k = \ell \quad [n]$.

Cor : $\{\omega_k / k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}$ et les $\omega_0, ..., \omega_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

Théorème :

Il y a exactement n racines n ème de l'unité distincts à savoir $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$.

Autrement dit $U_n = \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\}$ est un ensemble à n éléments.

Prop : Pour tout $n \geq 2$, la somme des racines n ème de l'unité est nulle.

b) l'équation $z^n = Z$ avec $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$.

L'équation $z^n = Z$ possède exactement n solutions distinctes.

c) cas particulier : l'équation $z^2 = Z$

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. D'après l'étude ci-dessus l'équation $z^2 = Z$ possède deux solutions opposées.

1er cas : Si Z s'exprime sous forme trigonométrique $Z = |Z|\mathrm{e}^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$). $\sqrt{|Z|}\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{|Z|}\mathrm{e}^{i\theta/2}$ sont les deux solutions cherchées.

2ème cas : Si Z est exprimé sous forme algébrique $Z=a+ib$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$).
Cherchons z solution sous la forme $z=x+iy$ (avec $x,y\in\mathbb{R}$).

$z^2=Z$ donne $x^2-y^2+2ixy=a+ib$ i.e. : $\begin{cases}x^2-y^2=a & (1)\\ 2xy=b & (2)\end{cases}$

Ce système est délicat à résoudre sans faire intervenir une troisième équation issue de l'égalité : $|z|^2=|Z|$. Cela donne $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (3)

(1)+(3) donne x^2 puis x au signe près.

(1)−(3) donne y^2 puis y au signe près.

Enfin (2) donne la compatibilité des signes de x et y.

A la fin cela offre deux solutions possibles.
Or nous savons qu'il y a exactement deux solutions, celles-ci sont donc déterminées.

4°) Résolution de l'équation du second degré

Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$.

On veut résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

$az^2+bz+c=...=a\left(\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta=0$ alors $z=-\dfrac{b}{2a}$ est la seule solution (dite double).

Si $\Delta\neq 0$ alors, en considérant $\delta\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$, l'équation possède deux solutions qui sont : $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Prop : Soit $S,P\in\mathbb{C}$.

$(x,y)\in\mathbb{C}^2$ est solution du système : $\begin{cases}x+y=S\\ xy=P\end{cases}$ ssi x et y sont les deux racines de l'équation $z^2-Sz+P=0$.

IV. Sommes et produits numériques

1°) Sommes numériques

Déf : Soit I un ensemble fini non vide et a_i avec $i\in I$ des nombres complexes (on dit que l'objet $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexe indexée sur I).
On note $\sum_{i\in I}a_i$ la somme des a_i avec i dans I.

Lorsque $I=\{m,m+1,\dots,n\}$ (avec $m\leq n\in\mathbb{Z}$) cette somme est encore notée $\sum_{i=m}^{n}a_i$ ou $\sum_{m\leq i\leq n}a_i$.

Prop : Avec des notations immédiates :
$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i$, $\sum_{i\in I}\lambda a_i=\lambda\sum_{i\in I}a_i$.
Si $I_1,...,I_p$ sont des ensembles deux à deux disjoint de réunion I :

$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{i\in I_1}a_i+...+\sum_{i\in I_p}a_i=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i\in I}a_i$.

Convention : $\sum_{i\in\varnothing}a_i=0$.

2°) Somme arithmétique et géométrique

Prop : (somme arithmétique)

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique se détermine par :

$\frac{\text{(1er teme)+(dernier terme)}}{2} \times \text{(nb de termes)}$.

Prop : (somme géométrique)

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ se détermine par :

$\text{(1er terme)} \times \frac{1-q^{\text{(nb de termes)}}}{1-q}$.

3°) Produits numériques

Déf : Soit I un ensemble fini et a_i avec $i \in I$ des nombres complexes.

On note $\prod_{i \in I} a_i$ le produit des a_i avec i dans I.

Lorsque $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$ (avec $m \leq n \in \mathbb{Z}$) ce produit est encore notée $\prod_{i=m}^{n} a_i$ ou $\prod_{m \leq i \leq n} a_i$.

Prop : Avec des notations immédiates :

$$\prod_{i \in I} a_i b_i = \left(\prod_{i \in I} a_i\right)\left(\prod_{i \in I} b_i\right), \ \prod_{i \in I} a_i^{\alpha} = \left(\prod_{i \in I} a_i\right)^{\alpha}.$$

Convention : $\prod_{i \in \varnothing} a_i = 1$.

V. Fonctions numériques

I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

1°) Fonctions réelles

a) définition

Déf : On appelle fonction réelle définie sur I toute application $f : I \to \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : On appelle alors graphe (ou courbe représentative) de f la courbe du plan d'équation cartésienne $y = f(x)$ i.e.

l'ensemble $\Gamma_f = \left\{ M \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} / x \in I \text{ et } y = f(x) \right\}$.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite paire (resp. impaire) ssi $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite T périodique (avec $T \in \mathbb{R}$) ssi $\forall x \in I, x+T \in I$ et $f(x+T) = f(x)$.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite croissante (resp. décroissante) ssi $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite strictement croissante (resp. décroissante) ssi $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

b) limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, x_0 un point de I ou une extrémité, éventuellement infinie de I.

On définira ultérieurement la notion de limite finie ou infinie de f en x_0.

Retenons qu'on note indifféremment $\ell = \lim_{x_0} f$, $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ pour signifier que ℓ est la limite de f en x_0. Nous admettons les résultats « intuitifs » d'opérations sur les limites et de comparaison de limite.

c) continuité et dérivabilité

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ssi pour tout $a \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \leq b \in I$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable ssi pour tout $a \in I$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

On la note $f'(a)$ ce qui permet de définir la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors f est croissante (resp. décroissante).

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf pour un nombre fini de valeurs alors f est strictement monotone.

Déf : En itérant le processus de dérivation, on définit la notion de dérivée d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de $f : I \to \mathbb{R}$ par $f^{(k)} = ((f')^{\cdots})'$ (k fois).

On note aussi $f^{(0)} = f$ appelée dérivée d'ordre 0 de f.

Déf : Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi $f^{(k)}$ existe et est continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi f est indéfiniment dérivable.

d) primitives et intégrales

Déf : On appelle primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, s'il en existe, toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème :

Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue, possède au moins une primitive F.

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $a, b \in I$. On appelle intégrale de f de a à b le réel $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive de f.

Prop : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues et $a, b \in I$. $\int_a^b f(t) + g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,

$\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Si $f \leq g$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2°) Fonctions complexes

a) définition

Déf : On appelle fonction complexe définie sur I toute application $f : I \to \mathbb{C}$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Pour étudier une telle fonction $f : I \to \mathbb{C}$, on introduit les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$\forall t \in I$, $\mathrm{Re}(f)(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $\mathrm{Im}(f)(t) = \mathrm{Im}(f(t))$.

Déf : On appelle conjuguée d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ la fonction $\overline{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.

b) limite

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe et t_0 un point de I, ou une extrémité éventuellement infinie de I.

Déf : On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en t_0 ssi $\left|f(t) - \ell\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.

On note alors $f(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \ell$, $\ell = \lim\limits_{t \to t_0} f(t)$ ou $\ell = \lim\limits_{t_0} f$.

Prop : $f(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(f(t)) \xrightarrow[t \to t_0]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f(t)) \xrightarrow[t \to t_0]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$.

c) continuité et dérivabilité

A l'aide de ce concept de limite, on peut, tout comme pour les fonctions réelles, définir les notions de continuité, de dérivabilité, de classe d'une fonction complexe. On obtient :

Prop : Une fonction complexe $f : I \to \mathbb{C}$ est continue ssi les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Prop : Une fonction complexe $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable ssi les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
De plus, si tel est le cas, $f'(t) = (\mathrm{Re}\, f)'(t) + i.(\mathrm{Im}\, f)'(t)$.

Prop : Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

d) primitives et intégrales

Déf : On appelle primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, s'il en existe, toute fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $F' = f$.

Prop : Toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue, possède au moins une primitive F.

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $a, b \in I$. On appelle intégrale de f de a à b le complexe $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b$ où F désigne une primitive de f.

3°) Fonctions polynomiales et rationnelles

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale ssi :
$\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, \forall x \in I, f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
On note $\mathcal{P}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble de ces fonctions.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle de fonction polynomiale réelle.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle de fonction polynomiale complexe.

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$.
Si $\forall x \in I, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ alors $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, a_k = b_k$. Par suite, il n'y a qu'une seule manière de décrire une fonction polynomiale.

Déf : La plus grande puissance de la variable intervenant dans l'expression d'une fonction polynomiale f non nulle est appelée degré de celle-ci.
On le note $\deg f$.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite rationnelle ssi il existe deux fonctions polynomiales $g, h : I \to \mathbb{K}$ telles que $\forall x \in I, h(x) \neq 0$ et $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.